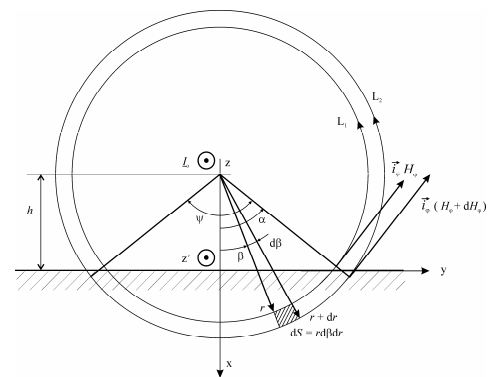
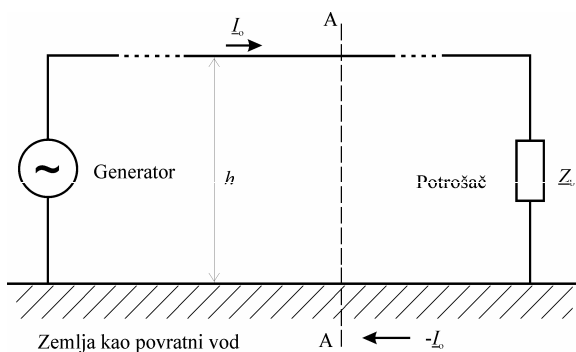


MAGNETSKO POLJE PROUZROKOVANO STRUJNOM RASPODELOM U ZEMLJI

M. Prša, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija
K. Kasaš-Lažetić, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, Srbija

UVOD

Većina električnih uređaja je uzemljena, tako da će, u slučajevima kao što su udar groma, zemljospoj ili prenapon, električna struja naći put u zemlju. Poznavanje strujne raspodele kroz poprečni presek zemlje omogućava tačan proračun elektromagnetskog polja u vazduhu, iznad zemlje, kao i u samoj zemlji. Poznavanje i električnog i magnetskog polja je neophodno da bi mogla da se odredi impedansa zemlje i od primarnog je značaja za određivanje parametara svakog sistema za prenos i distribuciju električne energije. Metode za određivanje elektromagnetskog polja su pregledno prikazane u literaturi [2] i [5]. Električno polje i strujna raspodela u zemlji su određeni prethodno, koristeći model provodnika iznad zemlje i zemlje kao povratnog provodnika, prikazan na Sl. 1, i usvojenu geometriju ovakvog modela, prikazanu na Sl. 2. Način određivanja ovih veličina, kao i dobijeni rezultati su detaljno prikazani u [1].



Sl. 1. Princip korišćenja zemlje kao povratnog provodnika Sl. 2. Geometrija posmatranog problema

Strujna raspodela u zemlji, koja prouzrokuje magnetsko polje, kako u zemlji, tako i iznad nje, data je modifikovanom Beselovom funkcijom nultog reda druge vrste, u zavisnosti od poluprečnika r [1],

$$\underline{J}_z(r) = \underline{C} [ker(ar) + jkei(ar)], \quad (1)$$

gde je

$$a = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{\pi} \arccos \frac{h}{r}} \quad (2)$$

a \underline{C} je kompleksna konstanta određena iz uslova da je ukupna jačina struje u zemlji jednaka jačini struje u provodniku, 1 A.

Kako je strujna raspodela u zemlji računata pomoću analitičkog i numeričkog metoda, i magnetsko polje prouzrokovano tom strujnom raspodelom mora da bude računato kombinacijom analitičkog i numeričkog postupka. U ovom radu je prikazano kompletno izvođenje tog postupka, koji konačno daje kompleksni vektor jačine magnetskog polja.

TEORIJSKE OSNOVE RADA

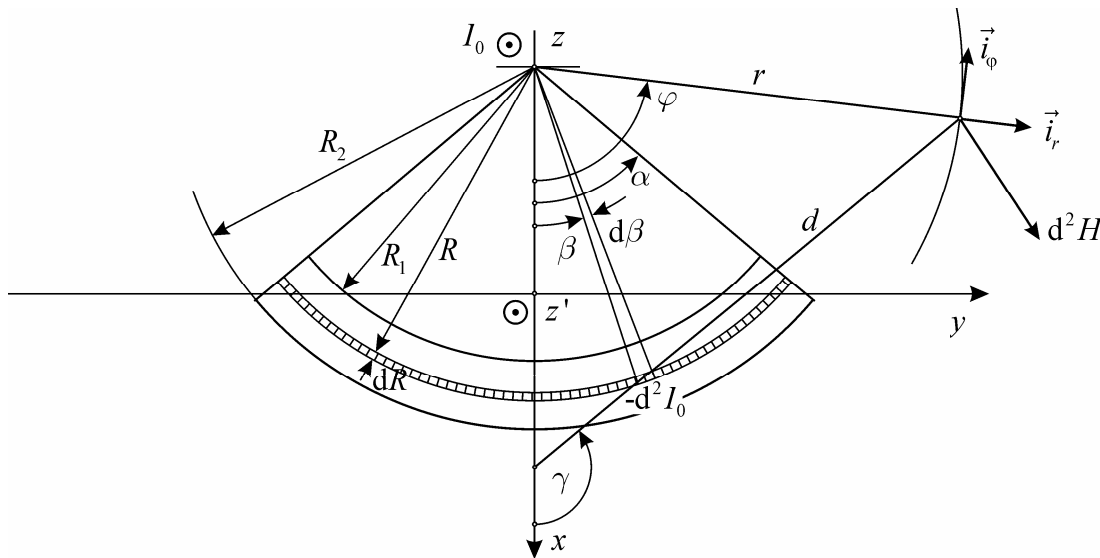
Polazimo od druge Maksvelove jednačine za kvazistacionarno elektromagnetsko polje,

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (3)$$

i razvijamo je u polarnom koordinatnom sistemu. U tom slučaju, prema slici 2, vektor jačine magnetskog polja je rešenje diferencijalne jednačine,

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{H} = -\frac{\psi}{2\pi} \vec{J}. \quad (4)$$

Da bismo rešili diferencijalnu jednačinu (4), posmatrajmo sliku 3 i koristimo oznake sa te slike.



Sl. 3. Geometrija za određivanje magnetskog polja

Koristeći kompleksne cilindrične koordinate, uvodimo ortove u smeru r i φ ,

$$\vec{i}_r = e^{i\varphi} \quad \vec{i}_\varphi = ie^{i\varphi}. \quad (5)$$

Strujno vlakno, sa strujom jačine $-d^2 \underline{I}_0$, prouzrokuje u tački T iznad površine zemlje, koja se nalazi na rastojanju d od vlakna, kompleksni vektor jačine magnetskog polja,

$$d^2 \underline{H} = -ie^\gamma \frac{d^2 \underline{I}_0}{2\pi} \frac{1}{de^{-i\gamma}}, \quad (6)$$

pri čemu je

$$d^2 \underline{I}_0 = \underline{J}(R) R dR d\beta, \quad de^{i\gamma} = re^{i\varphi} - Re^{i\beta}, \quad \text{odnosno,} \quad de^{-i\gamma} = re^{-i\varphi} - Re^{-i\beta}.$$

Postavljajući ove izraze u jednačinu (6) i posmatrajući domen $r > R$, dobija se da je

$$d^2 \underline{H} = -i \frac{\underline{J}(R)}{2\pi} R \frac{d\beta}{re^{-i\varphi} - Re^{-i\beta}} dR = -i \frac{\underline{J}(R)}{2\pi} \frac{R}{r} e^{i\varphi} \frac{d\beta}{1 - \frac{R}{r} e^{i\varphi} e^{-i\beta}} dR. \quad (7)$$

Obzirom da je $\left| \frac{R}{r} e^{i\varphi} e^{-i\beta} \right| < 1$,

izraz $\left(1 - \frac{R}{r} e^{i\varphi} e^{-i\beta} \right)^{-1}$ može da se razvije u beskonačan red,

$$\left(1 - \frac{R}{r} e^{i\varphi} e^{-i\beta} \right)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^m e^{im\varphi} e^{-im\beta}, \quad (8)$$

tako da je drugi diferencijal vektora jačine magnetskog polja, prouzrokovan strujnim vlaknom,

$$d^2 \underline{H} = -i \frac{J(R)}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{m+1} e^{i(m+1)\varphi} e^{-im\beta} d\beta dR. \quad (9)$$

Ceo kružni segment površine $\alpha(R_2^2 - R_1^2)$ stvara u tački T prvi diferencijal vektora jačine magnetskog polja,

$$d\underline{H} = -i \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{i(m+1)\varphi} \left[\int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{R}{r} \right)^{m+1} \underline{J}(R) \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-im\beta} d\beta dR \right]. \quad (10)$$

Obzirom da je ugao α konstantan za ceo kružni segment, drugi integral,

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-im\beta} d\beta = 2 \frac{\sin m\alpha}{m}, \quad (11)$$

može da se izvuče ispred integrala po koordinati R, tako da je, konačno, vektor jačine magnetskog polja, prouzrokovan kružnim strujnim segmentom,

$$d\underline{H} = -i \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\sin m\alpha}{m} e^{i(m+1)\varphi} \int_{R_1}^{R_2} \underline{J}(R) \left(\frac{R}{r} \right)^{m+1} dR \right]. \quad (12)$$

Kompleksni vektor jačine magnetskog polja ima r i φ komponentu, koje, kada se definišu pomoću ortova iz jednačine (5), imaju oblik,

$$dH_r = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\sin m\alpha}{m} \sin m\varphi \int_{R_1}^{R_2} \underline{J}(R) \left(\frac{R}{r} \right)^{m+1} dR \right], \quad (13)$$

$$dH_\varphi = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\sin m\alpha}{m} \cos m\varphi \int_{R_1}^{R_2} \underline{J}(R) \left(\frac{R}{r} \right)^{m+1} dR \right]. \quad (14)$$

Obzirom da funkcija $\underline{J}(R)$ nije data u analitičkom obliku, gornje integrale nije moguće rešiti direktno. Zbog toga pretpostavimo da se, između poluprečnika R_1 i R_2 , $\underline{J}(R)$ menja linearno sa R,

$$\underline{J}(R) = aR + B, \quad \text{za} \quad R_1 \leq R \leq R_2 \quad (15)$$

gde je,

$$a = \frac{J(R_2) - J(R_1)}{R_2 - R_1} \quad \text{i} \quad b = J(R_1) - aR_1 = J(R_2) - aR_2. \quad (16)$$

Sada integracija izraza (13) i (14) može da se izvede i dobijaju se r i φ komponenta vektora jačine magnetskog polja, između radijusa R_1 i R_2 ,

$$dH_r = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin m\alpha}{m} \sin m\varphi \left\{ \frac{ar^2}{m+3} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{m+3} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{m+3} \right] + \frac{br}{m+2} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{m+2} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{m+2} \right] \right\} \right\}, \quad (17)$$

$$dH_\varphi = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin m\alpha}{m} \cos m\varphi \left\{ \frac{ar^2}{m+3} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{m+3} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{m+3} \right] + \frac{br}{m+2} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{m+2} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{m+2} \right] \right\} \right\}. \quad (18)$$

Ako se poslednja dva izraza pažljivo pogledaju, vidi se da su to dva beskonačna reda tekućeg indeksa m , koji postaju neodređeni izrazi za $m = 0$. Za sve druge vrednosti indeksa m su oba reda regularna. Da bi magnetsko polje moglo da bude određeno, neophodno je posebno rešavati prve članove oba reda. To se postiže tako što se potraži granična vrednost tih članova za $m \rightarrow 0$. Određivanjem limesa gornja dva izraza za $m \rightarrow 0$, r i φ komponenta vektora jačine magnetskog polja postaju

$$dH_r = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin m\alpha}{m} \sin m\varphi \left[\frac{ar^2}{m+3} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{m+3} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{m+3} \right] + \frac{br}{m+2} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{m+2} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{m+2} \right] \right] \right\}, \quad (19)$$

$$dH_\varphi = -\frac{\alpha}{\pi} \left\{ \frac{ar^2}{3} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^3 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^3 \right] + \frac{br}{2} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right] \right\} - \quad (20)$$

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin m\alpha}{m} \cos m\varphi \left[\frac{ar^2}{m+3} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{m+3} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{m+3} \right] + \frac{br}{m+2} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^{m+2} - \left(\frac{R_1}{r} \right)^{m+2} \right] \right] \right\}.$$

Polazeći od jednačine (7), koristeći sličan postupak, dolazi se i do rešenja za $r < R$, tako da, konačno, komponente vektora jačine magnetskog polja, prouzrokovanog strujnom raspodelom u zemlji, dobijaju sledeći oblik

$$\begin{aligned} dH_r = & \frac{1}{\pi} \sin \alpha \sin \varphi \left\{ \frac{ar^2}{2} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right] + br \left[\left(\frac{R_2}{r} \right) - \left(\frac{R_1}{r} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sin 2\alpha \sin 2\varphi \left\{ ar^2 \left[\left(\frac{R_2}{r} \right) - \left(\frac{R_1}{r} \right) \right] + br \ln \frac{R_2}{R_1} \right\} + \\ & + \frac{1}{3\pi} \sin 3\alpha \sin 3\varphi \left\{ ar^2 \ln \frac{R_2}{R_1} + br \left[\left(\frac{r}{R_1} \right) - \left(\frac{r}{R_2} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=4}^{\infty} \left\{ \frac{\sin m\alpha}{m} \sin m\varphi \left[\frac{ar^2}{m-3} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{m-3} - \left(\frac{r}{R_2} \right)^{m-3} \right] + \frac{br}{m-2} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{m-2} - \left(\frac{r}{R_2} \right)^{m-2} \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} dH_\varphi = & \frac{1}{\pi} \sin \alpha \cos \varphi \left\{ \frac{ar^2}{2} \left[\left(\frac{R_2}{r} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{r} \right)^2 \right] + br \left[\left(\frac{R_2}{r} \right) - \left(\frac{R_1}{r} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sin 2\alpha \cos 2\varphi \left\{ ar^2 \left[\left(\frac{R_2}{r} \right) - \left(\frac{R_1}{r} \right) \right] + br \ln \frac{R_2}{R_1} \right\} + \\ & + \frac{1}{3\pi} \sin 3\alpha \cos 3\varphi \left\{ ar^2 \ln \frac{R_2}{R_1} + br \left[\left(\frac{r}{R_1} \right) - \left(\frac{r}{R_2} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=4}^{\infty} \left\{ \frac{\sin m\alpha}{m} \cos m\varphi \left[\frac{ar^2}{m-3} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{m-3} - \left(\frac{r}{R_2} \right)^{m-3} \right] + \frac{br}{m-2} \left[\left(\frac{r}{R_1} \right)^{m-2} - \left(\frac{r}{R_2} \right)^{m-2} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Kompleksni vektor jačine magnetskog polja može, konačno, da se napiše u obliku

$$\underline{H} = \sum_{k=1}^n (i_r dH_{rk} + i_\varphi dH_{\varphi k}), \quad (23)$$

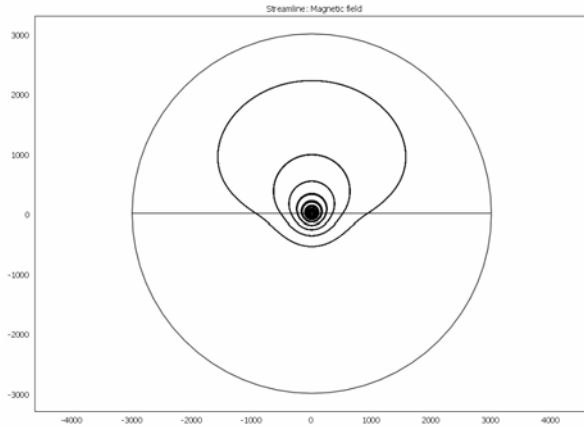
odnosno, y komponenta ovog vektora, potrebna za određivanje Pointingovog vektora i njegovog fluksa kroz površ zemlje je

$$\underline{H}_y = \sum_{k=1}^n (dH_{rky} + dH_{\varphi ky}). \quad (24)$$

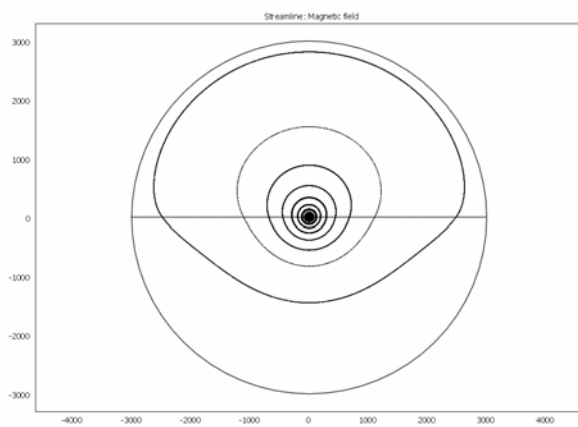
Pomoću ovog izraza i prethodno definisanog kompleksnog vektora jačine električnog polja, lako može da se odredi Pointingov vektor, njegov fluks i impedansa zemlje.

REZULTATI PRORAČUNA

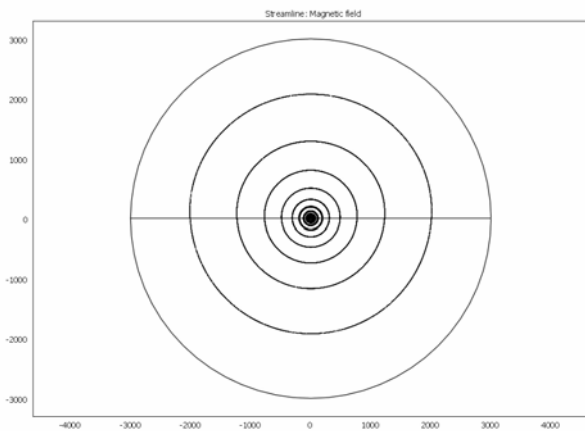
Kao i u radu [1], ceo napred opisani postupak je isprogramiran u programskom jeziku FORTRAN i rezultati proračuna su dati grafički na slikama 4, 5, 6 i 7. Slike prikazuju linije intenziteta vektora jačine magnetskog polja, \vec{H} , u zemlji i u vazduhu. Na sve četiri slike horizontalna linija predstavlja razdvojnu površ zemlja-vazduh, do krug predstavlja granicu domena u kome je računata strujna raspodela (izvan tog domena je intenzitet vektora gustine struje bio zanemarljivo mali). Proračun je urađen za četiri različite specifične otpornosti zemlje, $\rho = 50 \Omega\text{m}$, $\rho = 250 \Omega\text{m}$, $\rho = 1000 \Omega\text{m}$ i $\rho = 2500 \Omega\text{m}$.



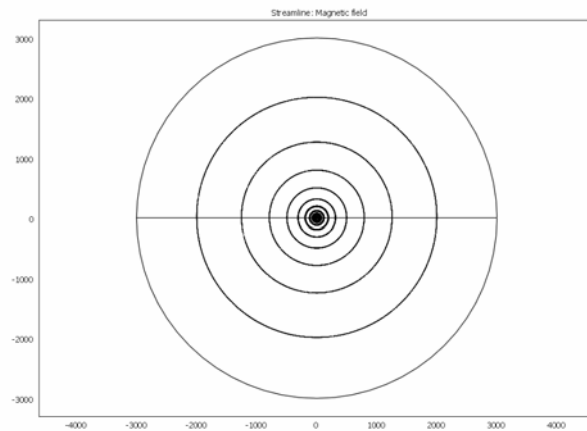
Sl. 4. Linije intenziteta vektora jačine magnetskog polja za $\rho = 50 \Omega\text{m}$



Sl. 5. Linije intenziteta vektora jačine magnetskog polja za $\rho = 250 \Omega\text{m}$



Sl. 6. Linije intenziteta vektora jačine magnetskog polja za $\rho = 1000 \Omega\text{m}$



Sl. 7. Linije intenziteta vektora jačine magnetskog polja za $\rho = 2500 \Omega\text{m}$

Vrednosti intenziteta vektora gustine struje, kao funkcije rastojanja r , su bile određene prema postupku opisanom u referenci [1] i zapisane u odgovarajuću datoteku, odakle ih je ovaj program učitao i koristio za određivanje magnetskog polja.

Osim toga, bilo je neophodno proveriti do kog člana mora da ide beskonačna suma iz izraza (21) i (22), a da greška računanja bude manja od unapred zadatih 1 %. Ustanovljeno je da je razlika u vrednostima intenziteta vektora jačine magnetskog polja manja od 1 % već ako se za indeks m u izrazima (21) i (22) uzme vrednost do $m_{\text{max}} = 20$. Međutim, pošto je greška kumulativna, u proračunu je uzeto da je $m_{\text{max}} = 50$, što znači da je uzeto u obzir 50 članova beskonačne sume. Produženje vremena računanja zbog toga je bilo zanemarljivo malo.

Ceo proračun je bio izveden na personalnom računaru Pentium V, pri čemu je vreme računanja svih vrednosti vektora jačine magnetskog polja, za svaku od vrednosti specifične otpornosti zemlje, bilo manje od 1 minut.

Pošto je računato samo magnetsko polje prouzrokovano strujnom raspodelom u zemlji, visina provodnika, h , prikazana na slikama 1, 2 i 3, nije varirana.

Kao što se vidi sa slika 4 do 7 i kao što je moglo da se očekuje, vektor jačine magnetskog polja u zemlji opada sa rastojanjem r od koordinatnog početka (tačka (0,0) na slikama od 4 do 7) približno kao $1/r$, a njegova raspodela bitno zavisi od izrazitosti površinskog efekta. Za male vrednosti specifične otpornosti zemlje, $\rho = 50 \Omega\text{m}$ i $\rho = 250 \Omega\text{m}$ je površinski efekat izrazit, pa su linije vektora \vec{H} drugačije u zemlji, gde postoji strujna raspodela, a drugačije u vazduhu, gde strujne raspodele nema. Za veće vrednosti specifične otpornosti zemlje je površinski efekat manje izražen, pa se i deformacija linija polja na razdvojnoj površi zemlja-vazduh smanjuje. Za $\rho = 2500 \Omega\text{m}$ su linije intenziteta vektora \vec{H} praktično koncentrični krugovi, kao da magnetsko polje stvara linijski provodnik postavljen u koordinatni početak

ZAKLJUČAK

Prikazani metod određivanja magnetskog polja poznate strujne raspodele u zemlji je zahtevao kompleksan matematički aparat i dosta matematičkog izvođenja, ali su dobijeni rezultati pokazali opravdanost takvog pristupa. Ceo proračun ne zahteva nikakve posebne računarske performanse, kako u pogledu računarske memorije, tako ni u pogledu vremena računanja. Pri tome su rezultati bar isto toliko tačni, ako ne i tačniji, od rezultata dobijenih nekom od numeričkih metoda sa velikim brojem algebarskih jednačina koje treba da budu rešene.

Dobijeni rezultati će biti korišćeni za precizno određivanje frekvencijski zavisne impedanse zemlje, za različite vrednosti visine provodnika iznad zemlje i za različite specifične otpornosti zemlje. Ceo postupak, uz manje modifikacije, je moguće sprovesti i za situacije kada je zemljište sastavljeno od dva ili više delova, koji su svaki za sebe homogeni, odnosno, imaju konstantnu vrednost specifične otpornosti. Takve situacije dosta često nastupaju u praksi.

Ključne reči: elektromagnetsko polje i strujna raspodela u zemlji, Pointingov vektor i njegov fluks, impedansa zemlje

LITERATURA

- 1. Prša M., Kasaš-Lažetić K., 2008. "Analitičko numerički metod za određivanje strujne raspodele u zemlji", Naučno-stručni simpozijum "INFOTEH-JAHORINA 2008", Zbornik Apstrakta, str. 33.
- 2. Wang Y.J., Liu S.J., 2001. "A Review of Methods for Calculation of Frequency-dependent Impedance of Overhead Power Transmission Lines." Proc. Natl. Sci. Council ROC(A), vol. 25, no. 6, str. 329-338.
- 3. Stojaković M., 2001. "Matematička analiza 2 – drugi deo", Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad.
- 4. Rao S.S., 2002. "Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists", Upper Saddle River, New Jersey 07458: Prentice Hall.
- 5. Wright S.H., Hall C.F., "Karakteristike vazdušnih vodova" u knjizi "Electrical Transmission and Distribution - Reference Book", prevedeno na srpski, Beograd: Građevinska knjiga, Poglavlje 3, pp.32-64. 1984.

¹Email: prsa@uns.ns.ac.yu, ²Email: kkasas@uns.ns.ac.yu